Tipps und Tricks:
- Früh genug die Probeprüfungen anschauen!
- Schemata lernen (Muskeloptimierung, Lagrange, kinemat. Kette) und gut üben
- Sorgfältig arbeiten und TR gut kennen

Formelsammlung Biomechanik 2

Winkelgschwindigkeit

Frequenz

Tangentialgeschwindigkeit

Kinematik

$\omega = 2\pi f \qquad f = 1/T \qquad v_T = \frac{U}{T} = r\omega$

$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

Zentripetalbeschleunigung

Periode

s, v, a und θ, ω, α: Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

Bewegungsgleichungen mit Umformungen

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation des Drehpunktes A

Rotation von P um A

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s_P}(t) = \mathbf{s_A}(t) + r_{AP}\mathbf{e_r}(t)$$

$$\mathbf{v_P}(t) = \mathbf{v_A}(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a_P}(t) = \mathbf{a_A}(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e_r}(t)$$

Fehler (Achtung: Quadrat!)

Funktion in Abhängigkeit aller Variablen

Gausssche Fehlerfortpflanzung

Quadrat!

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial x}|_{x=x_0,y=y_0...}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial y}|_{x=x_0,y=y_0...}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y,z,...)}{\partial z}|_{x=x_0,y=y_0...}\Delta z\right)^2 + \dots$$

Fehler der einzelnen Variable

Ableitung nach einer Variable

Winkelgeschwindigkeit

Trägheitsmoment

Drehimpuls

Kinetik

Impuls

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v_{sp}} \qquad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

Die Kraft ist die Ableitung des Impulses

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Das Moment ist die Ableitung des Drehimpulses

Masse der Komponente a

Koordinate des Schwerpunkts

Schwerpunkt: $\mathbf{R_{sp}} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r_a}}{\sum_a m_a}$

Koordinate des Schwerpunkts der Komponente a

Trägheitsmoment: $\mathbf{J_S} = \sum_i m_i \mathbf{r_{i,S}}^2$

Satz von Steiner: $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d_A}^2$

Rotation

gilt auch für Massepunkte mit Abstand d_A von Drehachse

$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\omega^2$

Translation

$E_{pot} = -\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

Abstand von Drehachse zu Schwerpunktsachse

Reibungskraft: $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n}$

Federkraft: $F_F = -k\Delta x$

Reibungskoeffizient

1

Auslenkung

Normalkraft

Federkonstante

Geschw' nach dem Stoss

Stösse

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(v_1 - v_2)C_R}{m_1 + m_2}$$

Wärmeenergie

$$v_2' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1(v_2 - v_1)C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2(1 - C_R^2)$$

Stosszahl

$$C = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

inelastisch

elastisch

Koordinatensysteme

Polarkoordinaten(r, θ)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e_r}}{\mathrm{d}t} = \omega\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega\mathbf{e_r}$$

Matrix rotiert von L nach G

Zylindrische Koordinaten (r, θ, z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e_r}(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e_z}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e_z}$$

Translation des KS-Ursprungs

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e_z}$$

Affine Transformation: $\mathbf{x_G} = [{}^G A_L]\,\mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L\to G}$

Elementarrotationen (Drehen des Koordinatensystems)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Rotation um x-Achse

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Rotation um y-Achse

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation um z-Achse

Zwangsbedingungen

Kinematische Kette

Anzahl Segmente

Freiheitsgrade in 3D: $M = 6n - \sum_{i=1}^{j}(6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für x_1, x_2, x_3):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

f_1; f_2; f_3 ableiten

Zweikörperkette

$$X_P = l_1\cos\alpha_1$$

$$Y_P = l_1\sin\alpha_1$$

nach *x_1; x_2; x_3 ableiten*

$$X_Q = l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Konstante oder Zeitdifferential

Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = 0$$

Potentielle Energie

Kinetische Energie

Generalisierte Geschwindigkeit

Generalisierte Koordinate

Geschwindigkeit des Endeffektors

Winkelgeschwindigkeit

$$\mathbf{v_Q} = \mathbf{J_Q} \cdot \dot{\alpha}$$

$$\mathbf{v_Q} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\alpha_1 - l_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2) & -l_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2) & l_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

"Mit der Jacobi-Matrix lassen sich die kartesischen Geschwindigkeiten (in x-, y- und z-Richtung) aus den Winkelgeschwindigkeiten berechnen."

Beschleunigung des Endeffektors

Ableitung der Jacobi-Matrix

Winkelbeschleunigung

$$\mathbf{a_Q} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{J_Q}}{\mathrm{d}t}\dot{\alpha} + \mathbf{J_Q}\ddot{\alpha}$$

$$\left[\dot{\mathbf{J}}\right]_Q = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\alpha}_1 \cos\alpha_1 - l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2) & -l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2) \\ -l_1\dot{\alpha}_1 \sin\alpha_1 - l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2) & -l_2(\dot{\alpha}_1+\dot{\alpha}_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2) \end{bmatrix}$$

Aktiver Energiefluss (Muskelkontraktion)

Winkelgeschwindigkeit

Energie des Mehrkörpersystems

(Leistung W, Reaktionskraft R, Momente M)

$$W_{M,\text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \omega$$

Passiver Energiefluss (in Gelenken)

Geschwindigkeit in Kraftrichtung

$$W_{R,\text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Energieverluste durch Reibung

Proximales Drehmoment

Inverse dynamische Analyse

mit R als Reaktionskräfte

Reaktionskräfte mit Hebelarmen

$$\text{2D: } J_O\alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

Distales Drehmoment

Euler-Gleichungen

Kräfte und Momente im anatomischen KS

Für rotierende Starrkörpersysteme:

«Die Summe aller Momente (prox. + distal sowie durch Reaktionskräfte) ist gleich $M_{x,y,z}$, beschrieben durch die Euler-Gleichung.»

$$F_x = m(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \omega_y v_z - \omega_z v_y)$$

$$F_y = m(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \omega_z v_x - \omega_x v_z)$$

$$F_z = m(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \omega_x v_y - \omega_y v_x)$$

x-, y- und z-Komponenten des Gesamtträgheitsmoments

$$M_x = J_x \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y$$

nach der Zeit ableiten → α_x

x-, y- und z-Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft F

Isometrische Maximalkraft

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a)\frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

Leistung

$$L(v) = vF(v)$$

Wärmeproduktionsrate

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{F(v)}{F_0}\right)(v+b)$$

Spezifische Konstanten

Momentane Leistung: $F \cdot v$

Huxleymodell: Neue Bindungen / Bindungen aufgebrochen / Bindungen transportiert

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \underbrace{f(x)[1-n(x,t)]}_{\text{Neue Bindungen}} - \underbrace{g(x) \cdot n(x,t)}_{\text{Bindungen aufgebrochen}} - \underbrace{v(t) \cdot n'(x,t)}_{\text{Bindungen transportiert}}$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} \qquad \text{isometrisch}$$

Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda(M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

Muskeloptimierungskriterium

Lagrange-Multiplikator

Kräftegleichung einer Feder

Federkonstante

Harmonischer Oszillator

Auslenkung

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Auslenkung zum Zeitpunkt t

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Gravitationskraft (nur falls Feder vertikal)

$$y(t) = \underbrace{A_1 \sin\omega t + A_2 \cos\omega t}_{\text{Homogene Lösung}} + \frac{g}{\omega^2}$$

Inhomogene Lösung (wenn Gravitationskraft relevant)

Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

Additionstheoreme

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Trigonometrische Werte und Umrechnungen

$$\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(60°) = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

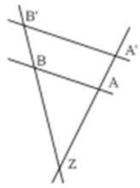
$$\phi_{rad} = \phi_{deg}\frac{\pi}{180}$$

Ableitungsregeln

$$f(x) = u(x)w(x) \implies f' = u'w + uw'$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{w(x)} \implies f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Strahlensatz



$$|AB| : |A'B'| = |ZA| : |ZA'|$$