Biomechanik II

Geometrie

$tan = \frac{sin}{cos}$

Cosinus Satz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos\alpha$

$\cos(\alpha) =$

Sinus Satz:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$Kreisumfang: 2\pi r$

$Kreisvolumen: \pi r^2$

Trägheitsmomente:

Hohlzylinder um Längsachse:

J=m*r²

Vollzylinder:

J=1/2*m*r

Vollzylinder um Querachse:

J=1/4mr²+1/2ml²

Statik

$\sum F = 0 \quad \sum M = 0$

Kinematik

Translation

$s(t) = s_0 + vt + {}^1\!/_2\, at^2$

$\dot{s}(t) = v(t) = v_0 + at$

$\ddot{s}(t) = a(t)$

Rotation

$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + {}^1\!/_2\, \alpha t^2$

$\dot{\theta}(t) = \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$\ddot{\theta}(t) = \alpha(t)$

Tangentialgeschwindigkeit:

$v_T = \omega r$

Zentripetalbeschleunigung:

$a = r\omega^2$

Winkelbeschleunigung:

$\alpha = \frac{a}{r}$

Kombination

$P = Massenpunkt\ A = Rotationsachse$

$T = Tangential\ r = radial$

$\vec{s}(t)_P = \vec{s}(t)_A + r_{AP}\vec{e}_r(t)$

$\vec{v}(t)_P = \vec{v}(t)_A + r_{AP}\omega(t)\vec{e}_T(t)$

$\vec{a}(t)_P = \vec{a}(t)_A + r_{AP}\alpha\vec{e}_T(t) -$
$r_{AP}\omega^2(t)\vec{e}_r(t)$

Wichtige Grössen

$KSP \rightarrow (\sum m_i)\vec{r}_{KSP} = \sum m_i r_i$

$Impuls \rightarrow \vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{F}_G = m\vec{g} \quad F_R = \mu F_N \ \vec{F}_F = k\Delta\vec{x}$

Wichtige Grössen Rotation

$\vec{F}_{ZP} = -mr\omega^2\vec{e}_r$

$Trägheitsmoment\ um\ Achse\ A:$

$J_A = \sum m_i r_i^2$

$Trägheitsmoment\ Achse\ B\ (Satz\ von\ Steiner):$

$J_B = J_A + md_{AB}^2$

$Drehimpuls: \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = J\omega^2$

$Moment: \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Newton Gesetze

$1. \sum F = 0 \rightarrow a = 0$

$2. F = ma$

→ Rotation: $M = J * \alpha$

$3. Actio\ Reactio$

$4. \sum F_i = \vec{F}$

Energie, Arbeit, Leistung

Energie $[J = Nm = \frac{kgm^2}{s^2}]$

$E_{pot} = mgh \quad E_{Feder} = {}^1\!/_2\, kx^2$

$E_{kin} = {}^1\!/_2\, mv^2 + {}^1\!/_2\, J_{KSP}\omega_{KSP}^2$

$E = konst. = E_{Kin} + E_{pot} + \dots + U$

$U = Enegieverlust\ durch\ Reibung$

Arbeit $[J]$

$\Delta E = W = \vec{F}\Delta\vec{s} = F\Delta s\cos(\alpha)$

Leistung $[W = {}^J\!/_s]$

$P = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F}\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \vec{F}\vec{v}$

Stossmechanik

Bei einem Stoss bleibt der Impuls erhalten.

Elastischer Stoss (Energie und Massenerhaltung)

Gerade:

$m_1 * (\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2 * (\vec{v}_2 - \vec{v}_2')$

$\boldsymbol{\vec{v}_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}}$

Gilt wenn Objekt Nr. 2 sich noch nicht bewegt:

$\vec{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_1 \qquad \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} * \vec{v}_1$

Schief:

$e_s = Stosslinie \quad e_T = Stosstangente$

$\alpha_{1,2} = Winkel\ zwischen\ Stosstangente$
$und\ Geschwindigkeit\ (Aufprallwinkel)$

$\vec{v}_{1,t}' = \vec{v}_{1,t}$

$\vec{v}_{1,s}' = wie\ gerader\ Stoss\ rechen$

$\|\vec{v}_1'\| = \sqrt{(\vec{v}_{1,t}')^2 + (\vec{v}_{1,s}')^2}$

$\tan\alpha_1' = \frac{\vec{v}_{1,t}'}{\vec{v}_{1,s}'}$

Unelastischer Stoss

Beide Objekte nachher mit gleicher Geschwindigkeit

$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}'$

Bei unelastischen Stössen geht Energie in Form von U verloren:

$U = \sum E_{KIN} - \sum E_{KIN}'$

$= \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} * (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$

Stosszahl (1=Elastisch, 0=unelastisch)

$C_R = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$

$\boldsymbol{\vec{v}_1' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2 - m_2(v_1 - v_2)C_R}{m_1 + m_2}}$

$U = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} * (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 * (1 - C_R^2)$

Beim exzentrischen Stoss betrachtet man die Impuls und die Drehimpulserhaltung.

Koordinaten Systeme

Um ein lokales Koordinatensystem $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ zu definieren, braucht es 3 Referenz-koordinaten die im globalen System $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ bekannt sind und nicht auf einer Linie liegen.

$\vec{\imath} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|} \qquad \vec{\jmath} = \frac{(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}{|(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)|}$

$\vec{k} = \vec{\imath} \times \vec{\jmath}$

Affine Transformation

Von Lokal zu Global $\vec{p}_G = [AT_L^G]\vec{p}_L + \vec{t}_{L\rightarrow G}$

Bestehend aus Translation, Rotation, Skalierung und Scherung.

<u>Translation</u>: $\vec{p}_G = \vec{p}_L + \vec{t}_{L\rightarrow G}$

<u>Rotation</u>: $\vec{p}_G = [R_L^G]\vec{p}_L$

Da die Rotationsmatrix orthogonal ist, erfüllt sie folgende Kriterien: $[R]^T = [R]^{-1}$;

$[R]^T[R] = 1;\ det[R] = 1$

<u>Skalierung</u>: $\vec{p}_G = [A_L^G]\vec{p}_L$

$$[A_L^G] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

<u>Scherung</u>: $\vec{p}_G = [L]\vec{p}_L$

$$[L] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}}_{parallel\ Y\ Achse}\ oder\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{parallel\ X\ Achse}$$

Euklidische Transformation

$\vec{p}_G = [R_L^G]\vec{p}_L + \vec{t}_{L\rightarrow G}$

Nur Rotation und Translation, wichtig für starre Mehrkörpersysteme.

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = [T_L^G]\begin{pmatrix} p_i \\ p_j \\ p_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow [T_L^G] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euler und Kardanwinkel

Euler: zwei von 3 Rotationen um selbe Achse (z.B. z,y,z)

Kardan: Rotation um 3 verschiedene Achsen (x,y,z)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[R_L^G] = [R_z][R_y][R_x];\quad [R_G^L] = [R_L^G]^T;$

$[R_B^A] = [R_G^A][R_B^G] = [R_A^G][R_B^G]^T$

Kinematik von Mehrkörpersystemen

Freiheitsgrade:

$3D: M = 6n - \sum(6 - f_i)$

$n = Anz. Glieder$

$f_i = Freiheitsgrade\ des\ Gelenks\ i$

→ 2D genau gleich einfach mit 3 anstatt 6

Direkte Kinematik

Punkte sind gesucht, Winkel bekannt

→ eindeutig

$$\begin{pmatrix} X_Q \\ Y_Q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin\alpha_2 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$$

Inverse Kinematik

Punkte (teilweise) bekannt, Winkel gesucht

→ nicht immer eindeutig

$\tan\alpha_1 = \frac{Y_P}{X_P}$

$\tan\theta = \frac{Y_Q - Y_P}{X_Q - X_P} \rightarrow \alpha_2 = \theta - \alpha_1$

Geschwindigkeiten

$\dot{\alpha} = Gelenkgeschwindigkeit$

$\dot{\theta} = Segmentgeschwindigkeit$

$\dot{\alpha}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$

$\vec{v}_P = l_1\dot{\theta}_1\vec{e}_T;\ \vec{e}_T = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_Q = d\vec{Q} = [J]_Q d\vec{\alpha}_i$

$$= \begin{bmatrix} \frac{dX(\alpha1,\alpha2)}{d\alpha1} & \frac{dX(\alpha1,\alpha2)}{d\alpha2} \\ \frac{dY(\alpha1,\alpha2)}{d\alpha1} & \frac{dY(\alpha1,\alpha2)}{d\alpha2} \end{bmatrix}_Q \begin{pmatrix} d\alpha1 \\ d\alpha2 \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} -l1\sin\alpha1 - l2\sin(\alpha1 + \alpha2) & -l2\sin(\alpha1 + \alpha2) \\ l1\cos\alpha2 + l2\cos(\alpha1 + \alpha2) & l2\cos(\alpha1 + \alpha2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\alpha}1 \\ \dot{\alpha}2 \end{pmatrix}$$

Beschleunigung

$\vec{\alpha}_Q = [\dot{J}]_Q\dot{\vec{\alpha}} + [J]_Q\ddot{\vec{\alpha}}$

Kinetik von Mehrkörpersystemen

Annahmen: KSP, Trägheitsmoment und Längen der Segmente bleiben konstant. Masse reduziert auf KSP und Segmente verbunden mit Scharniergelenken. Muskeln auf Drehmomente reduzieren.

Free Body Diagramm: 1. System abgrenzen, 2. Skizze des relevanten Systems, Koordinatensystem wählen, alle Kräfte und Momente, welche auf das relevante System einwirken einzeichnen.

$Statischer\ Fall = \sum\vec{F}_i = 0;\ \sum\vec{M}_i = 0$

$Quasistatischer\ Fall \rightarrow a = 0$

$Dynamischer\ Fall:$

$\rightarrow \sum\vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}};\ \sum\vec{M}_i = J\ddot{\vec{\phi}}$

Vorwärtsdynamische Analyse

Die Berechnung der Bewegung anhand von angreifenden Kräfte oder Momente. Durch Integration von Newtons 2. Bewegungsgleichung oder über Lagrange-Formalismus → sehr aufwändig.

Inverse Dynamische Analyse

Berechnung vom distalen zum proximalen Segment eines Starrkörpermodells mittels Free-Body-Diagramm. (Vom Bekannten (äussere) auf unbekannte innere Kräfte) Masse, Trägheitsmoment, Beschleunigung des KSP gegeben. Winkel und Winkelbeschleunigung in der Bewegungsebene gegeben.

$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum M_z = J_0\alpha$

Energetik von Mehrkörpersystemen

<u>Passiver Energiefluss</u>, jedes Segment übt passive Kräfte über das Gelenkzentrum aus. Falls sich dabei die Position des Gelenkzentrums verschiebt entsteht ein passiver Energiefluss.

$P_{12} = \frac{\Delta W_{12}}{\Delta t} = \vec{R}_{12} * \vec{v}_c = R_{12}v_c\cos\theta_2$

$\theta_2 = Winkel;\ \vec{R}_{12} = Kraftvektor;$

$\vec{v}_c = Geschwindigkeitsvektor$

Der Passive Energiefluss entlang eines Gelenks ist Null, und die totale Energie des Mehrkörpersystems bleibt erhalten.

$P_{21} = -P_{12}$

<u>Aktiver Energiefluss</u>, die aktive Leistung P_M des Muskels.

$P_M = \vec{M} * \vec{\omega}$

$\vec{M} = Muskuläres\ Drehmoment;$

$\vec{\omega} = Winkelgeschwindigkeit\ im\ Gelenk$

Bei konzentrischen Bewegungen ist die Leistung positiv und bei exzentrischen negativ. (Isometrisch = 0)

<u>Arbeit</u> (Integration der Leistung über Zeit)

$W_M = \int_{t1}^{t2} P_M dt$

<u>Energiezustand</u>

$\Delta E_S = \Delta E_{Pot} + \Delta E_{Kin} - \Delta E_{ext}$

Die Gesamtenergie E_B mit N Segmenten:

$E_B = \sum_{i=1}^{N} E_{S,i}$

$\Delta E_S = 0;$

$wenn\ System\ von\ aussen\ betrachtet\ wird!$

<u>Gesamtleistung</u>

Der passive Energiefluss, wird nur an „abgeschnittenen" Segmenten addiert, da verbundene Gelenke einen Energiefluss von 0 haben.

$$P_B = \underbrace{\sum_i^2 P_{R,i}}_{passiv} + \underbrace{\sum_j^N P_{M,j}}_{aktiv} - \underbrace{\frac{\Delta U}{\Delta t}}_{Reibung}$$

<u>Wirkungsgrad</u>

$\eta_B = \frac{P_B}{\sum_i^2 P_{R,i} + \sum_j^N P_{M,j}}$

Falls keine Reibung ist der Wirkungsgrad = 1

<u>Effizienz</u>

Mechanische Effizienz ist abhängig von der optimalen Muskelaktivität und einem idealen Energiefluss. Reibung und Co-Kontraktion von Antagonisten reduzieren die Effizienz.

Ebenfalls wichtig sind Neurologische (eine Bewegung mit minimaler mechanischen Energie zu kontrollieren) und Metabolische (Umwandlung Metabolische zu Mechanische Energie) Effizienz.

<u>Lagrange-Formalismus</u>

$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) =$

$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - V(q_1, \dots, q_n, t)$

$t = Zeit$

$L = Lagrangefunktion$

$T = Gesamte\ Kinetische\ Energie$

$V = \sum Potentiale\ und\ Einzelkräfte$

$n = Anzahl\ Freiheitsgrade$

$\dot{q}_k = Geshwindikeiten\ der\ Koord.$

$q_k = Koordinaten$

$k = Laufvariabel\ 1, \dots, n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = Q_n$$

$Q_n = verallgemeinerte\ Kräfte,$
$im\ Konservativen\ System = 0$

$$\underbrace{p_k = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{Impuls} \qquad \underbrace{F_k = \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}p_k}_{Kraft}$$

Muskelmechanik

Zwei Modelle Huxley und Hill.

<u>Hill-Modell:</u>

$P(v) = P_0 - (P_0 + a)\frac{v}{v + b}$

$v = \frac{b*(P_0 - P(v))}{a + P(v)}$

$v = Verkürzungsgeschwindigkeit$

$P_0 = A_0 * 25\frac{N}{cm^2}\ isometrisch\ MaxKraft$

$Typ\ 1: a = P_0 * 0.15; b = 0.3l_0s^{-1}$

$Typ\ 2: a = P_0 * 0.25; b = 1.5l_0s^{-1}$

$L(v) = v * P(v)$ -> max bei 1/3 v_{max}

$v_{max} = \frac{b}{a}P_0$

$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{P(v)}{P_0}\right)(v + b) =$

$Wärmeproduktionsrate$

$\eta = \frac{L(v)}{\dot{Q}(v) + L(v)} = Wirkungsgrad$

$Z = Aktivierungsanteil\ [0,1]$

$P(Z, v) = P(v) * Z$

Das Hill-Modell betrachtet den Muskel als ein Kontraktiles Element (CE), Parallel-geschaltete Feder (PE) und Serielle Feder (SE).

Die PE (l) wirkt als passive Kraftentwicklung des Bindegewebes und die SE (y) die passive Kraftentwicklung in den Myofibrillen und Sehnen.

$F_{CE}(x, \dot{x}) = F_{SE}(y) = \frac{P_0(x)b - a\dot{x}}{\dot{x} + b}$

$l(t) = x(t) + y(t)$

<u>*Huxley*</u>

Huxley Modell mit mehr Bezug auf Aufbau des Muskel (molekular). Kraft abhängig von Überlappung der Filamente.

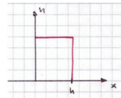
Die Dichte (n(x,t)) der Bindungsstellen wird mit Wahrscheinlichkeiten für neue Bindungen (f(x)) und für Spaltungen (g(x)).

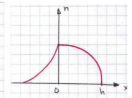
Im isometrischen Fall (v=0), kann man die Zeitkomponente weglassen.

$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$

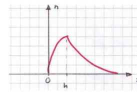
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ f_1\frac{x}{h} & : \quad 0 \le x \le h \\ 0 & : \quad x > h \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_2 & : \quad x < 0 \\ g_1\frac{x}{h} & : \quad 0 \le x \end{cases}$$





- 1: Isometrische Dichteverteilung
-2: Konzentrische Dichteverteilung
-3: Exzentrische Dichteverteilung



$P(x) = m\frac{\frac{s}{2}}{l} * \int_{-\infty}^{\infty}(kx) * \tilde{n}(x)dx$

m=max. Anz. Bindung pro Volumen, s=Länge Sarkomer und l=Abstand zwischen Andockstellen und Aktinfilamenten

kx=Kraft des Myosinkopfs, entspricht Dehnung.

Muskelkräfte während menschlicher Bewegung

<u>Fliederung:</u> Muskelfasern verlaufen nicht zwangsläufig entlang der Muskel-Sehnen-Linie. Ihre Ablenkung nennt man Fliederungswinkel φ.

Der Physiologische Querschnitt berechnet sich so:

$PCSA = \frac{V_m}{l_m};\ l_m = Muskelfaserlänge$

Muskelkraft entlang Sehnen-Muskel-Linie

$F_m = P(v) * PCSA * \cos(\varphi)$

Bestimmung von Muskelkräften → durch verschiedene mögliche Kombinationen von Muskelkräften führt zu einer unterbestimmten Gleichung → Optimierungsverfahren

$$\overset{Muskel}{\vec{M}_M} = \overset{Gelenk}{\vec{M}_G}$$

$$M_M = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_e} F_{ei}(t) \times d_{ei}(t)}_{Extensoren} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_f} F_{fi}(t) \times d_{fi}}_{Flexoren}$$

$$[A]_{m\times n} * \underbrace{\vec{f}_n}_{\substack{Unbekannte\\Muskelkräfte}} = \underbrace{\vec{b}_m}_{\substack{Bekannte\\Reaktionskräfte}} \quad ; \quad n > m$$

Ziel ist es $\psi(t) = Minimuerugskriterium$ zu minimieren.

Minimum wenn beide partielle Ableitungen der Lagrange-Gleichung =0 sind.

$L(\vec{f}, \vec{\lambda}) = \psi(\vec{f}) + \vec{\lambda}^T([A]\vec{f} - \vec{b})$

Oft kann aber auch mit logischem Denken minimiert werden, so soll bei minimaler Muskelbelastung, die Kraft der Antagonisten = 0 sein und auch die Kräfte mit dem größeren Hebelarm bevorzugt werden.

Verschiedene Kriterien

Gleiche Muskelspannung

$\sigma_i(t) = \frac{F_i(t)}{A_i} = \sigma_0, \forall i, i = 1, N$

Ai = PCSA

$\sigma_0(t) = \frac{M_M(t)}{\sum_{i=1}^{N} h_i(t) * A_i}$

$F_i = \sigma_o(t) * A_i$

Alle Muskeln sind auch bei kleinem Drehmoment aktiv!

Summe der Muskelspannungen ist Minimal

$\psi(t) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(t)$

$F_N(t) = \frac{M_M(t)}{h_N(t)} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_i(t)}{h_N(t)} F_i(t)$

$\psi(t) = \sum_{i=1}^{N-1} C_i^N(t) * F_i(t) + \frac{M_M(t)}{h_N(t) * A_N}$

$C_i^N(t) = \frac{h_N(t) * A_N - h_i * A_i}{h_N(t) * A_i * A_N}$

Nur der Muskel aktiv, mit dem grössten negativen Faktor, erst nach Erreichen des Maximums der nächste aktiv.

Summe Muskelkräfte ist minimal

$\psi(t) = \sum_{i=1}^{N} F_i(t)$

$= \sum_{i=1}^{N-1} F_i(t) * \left(1 - \frac{h_i(t)}{h_N(t)}\right) + \frac{M_M(t)}{h_N(t)}$

$F_N(t) = \frac{M_M(t)}{h_N(t)} - \sum_{i=1}^{N-1} F_i(t) * \left(\frac{h_i(t)}{h_N(t)}\right)$

Zuerst werden Muskeln mit grossem Hebelarm aktiviert.

Summe der Muskelkräfte im Quadrat Minimal

$\psi(t) = \sum_{i=1}^{N} F_i(t)^2$

$F_N = \frac{h_N}{\sum_{i=1}^{N} h_i^2} * M_M$

Alle N Muskeln erzeugen eine Kraft auch bei kleinem Drehmoment.

Arbeit aller Agonisten minimal

$\psi = \sum_{i=1}^{N} h_i * F_i * \Delta\phi$

$\Delta\phi = Weg\ Muskel\ (Gelenkwinkel)$

Bei kleinen Winkeländerungen ist die Gleichung identisch mit der Grundgleichung uns deshalb keine neue Zusatzbedingung → keine grosse Hilfe

Wärmeproduktion der Agonisten Minimal

$\psi = \dot{Q} = ab + av$; *a & b von Hill*

Im isometrischen Zustand ist v=0, also ist die Wärmeproduktion =a*b.

$$F(Z, v) = P_0(Z)(1 - \frac{P_{0,1} + a_1}{a_1} * \frac{v}{b(Z) + v})$$

$P_0(Z) = P_{0,1} * Z;$

$a(Z) = a_1 * Z; b(Z) = b_0 + b_1 * Z$

Man versucht also zuerst die Muskeln zu aktivieren bei dem das Verhältnis Wärmeproduktion/Muskelmoment möglichst klein ist.

Typ 1 wird vor Typ 2 aktiviert. Zuerst wird ein Muskel vollständig aktiviert und erst bei weiterer Erhöhung der Belastung wird der 2. Muskel aktiviert.

Das Feder-Masse Modell beim Gehen

Der Gang des Menschen ist zyklisch und kann mittels dem sogenannten Feder-Masse Modell (harmonischer Oszillator) beschrieben werden. Bewegungsmuster können mit sinus-förmigen Funktionen beschrieben werden.

Gehen ist ein zyklischen Fortbewegungsmuster mit zwei Beinen, wobei zu jedem Zeitpunkt ein Fuss den Boden berührt. Jedes Bein hat eine Standphase (62%) und eine Schwungphase (ca.38%), wobei der Zyklus beider Beine um 50% zueinander verschoben ist.

→ 2 Kraftspitzen, Anfang und Ende Bodenkontakt

Rennen ist eine zyklische Fortbewegungsart mit Flugphase. (ohne Bodenreaktionskraft)

→ nur eine Kraftspitze

<u>Harmonischer Oszillator</u>

$$m\ddot{x}(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

m=Masse, x(t)=Auslenkung bezüglich Ruhelage (x_0=0) und abhängig von Kontanste (k).

$$x(t) = Acos(\omega t - \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

A=Amplitude, T=Periode, φ=Phasenverschiebung.

$$\dot{x}(t) = \omega Asin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

<u>Hüpfen</u>

An Ort kann mit eindimensionaler Feder beschrieben werden.

Kontaktphase:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y = \dot{y}_0\sqrt{\frac{m}{k}}sin(\omega t) - \frac{gm}{k}cos(\omega t) + \frac{gm}{k}$$

y = Auslenkung der Feder,

$\dot{y}_0$ = Landegeschwindigkeit

Kraft während Kontaktphase:

$$F_K = \dot{y}_0\sqrt{km}\sin(\omega t) - gmcos(\omega t) + gm$$

Flugphase

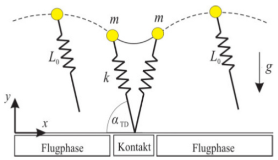
$$m\ddot{y} - mg = 0$$

$$y = g\dot{t} + \dot{y}_0$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0$$

<u>Rennen</u>

Oszillierender Wechsel zwischen Flug- und Kontaktphase. Massenpunkt bewegt sich horizontal und vertikal.



Flugphase

$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}$

Kontaktphase

$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -k\left(\frac{l_0}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}$

l_0 = Beinlänge (Ruhe), x,y = Position KSP

α=Anstellwinkel

Beim Laufen sind die Kinetische und die Potentiale Energie (mit Referenz auf der maximalen Einlenkung) beim Bodenkontakt gleich der Federenergie am Punkt der maximalen Einlenkung. (Der Weg vom Bodenkontakt bis zur maximalen Einlenkung ist ¼ der Periode.)

<u>Gehen</u>

Beidseitige und einseitige Kontaktphasen → 2 Federn müssen berücksichtigt werden.

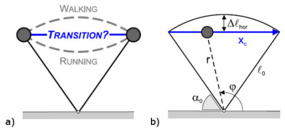
$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{B1,x}\\ F_{B1,y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_{B2,x}\\ F_{B2,y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -mg\end{pmatrix}$$

Wobei F_{B1} und F_{B2} zeitlich zueinander verschoben sind.

Beim Gehen ist der Schwerpunkt am tiefsten in der Standphase und erhöht sich während der Schwungphase.

<u>Übergang Laufen-Gehen</u>

Beim Übergang Laufen-Gehen wird angenommen, dass der KSP während der Standphase eine horizontale, gerade Bewegungsbahn durchläuft.



Mittlere Geschwindigkeit der Standphase:

$$v = \frac{x_c}{t_c}$$

t_c = Bodenkontaktzeit

$x_c = 2l_0\cos(\alpha_0)$

Maximale Auslenkung bei $t_c/2$:

$\Delta r_{max} = \Delta l_{hor} = l_0(1 - \sin(\alpha_0))$

Minimale Geschwindigkeit notwendig:

$v_{min} = \sqrt{F_r g l_0}$

Froude Nummer: $F_{r,min} = 0.4$